

Analisis Kemampuan Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Bukti Matematis pada Mata Kuliah Struktur Aljabar

Teti Trisnawati^{1*}, Rohmad², Isnarto³, Fauzi Fadliansyah⁴

^{1,4} Universitas Primagraha

^{2,3} Universitas Negeri Semarang

*Penulis Korespondensi: teti.stkippelitapratama@gmail.com

Abstract. This study aims to determine and analyze the ability of Primagraha University students in the 5th semester of Mathematics Study Program in proving mathematical problems in algebraic structure material. This study uses a qualitative research type of case study. The case study itself is a method of knowing and understanding someone using inclusive and comprehensive or comprehensive practices. Through the practice carried out, researchers will collect individuals who are used as research subjects. In-depth information digging will be carried out by researchers for a detailed understanding. In this study, it included students who lacked an understanding of algebraic structure material. The results of the initial observations showed that students who had difficulty understanding algebraic structure material tended to not be confident in asking for repetition of material from the lecturer when they did not understand, were not comfortable with the learning model provided and did not want to discuss with their friends. The research results show that; 1) students who are lacking in understanding algebraic structure material need a learning model that is able to make students comfortable in learning, 2) students need regular discussion rooms when studying algebraic structure material and 3) students need a continuous offline learning pattern for algebraic structure material.

Keywords: student abilities, construct a mathematical proof, algebraic structure

1. Pendahuluan

Karakter pengetahuan matematika itu bersifat abstrak (Aydin et al., 2017) (Özdemir, Karaşan, & Şahal, 2021). Sifat abstrak inilah yang menyebabkan matematika diajarkan secara berjenjang dimulai dari tahapan yang sederhana hingga kompleks (Tang, Tsai, & Huang, 2020). Dari yang bersifat kongkrit, semi abstrak menuju pada pengetahuan abstrak (GoldinMeadow, 2015). Pengetahuan matematika terbagi menjadi dua yaitu pengetahuan konseptual dan prosedural (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010). Pada teori pendekatan instruksional konstruktivis lebih ditekankan pada pengetahuan konseptual (Lui & Bonner, 2016). Pengetahuan konseptual ini melibatkan kemampuan dalam memahami suatu konsep serta memahami hubungan antar konsep satu dengan konsep lain dalam matematika (Ma, 2010). Karena karakter matematika yang bersifat hirarkis yaitu adanya keterkaitan antar satu konsep dengan konsep lainnya, akan sangat fatal jika terjadi kegagalan dalam memahami suatu konsep. Kegagalan memahami suatu konsep inilah yang disebut miskonsepsi. Miskonsepsi adalah kesalahpahaman yang disebabkan adanya pemikiran yang tidak didasarkan pada informasi yang tepat. Miskonsepsi dapat juga diartikan sebagai ketidaksesuaian pandangan seseorang dengan pandangan ilmiah (Arslan, Cigdemoglu, & Moseley, 2012). (Lucariello, Tine, & Ganley, 2014) (Ay, 2017) menyatakan bahwa miskonsepsi merupakan hambatan dalam proses asimilasi konsep yang benar. Miskonsepsi atau kesalahpahaman ini

bermula dari konsep yang dibentuk secara mandiri melalui proses penalaran, intuisi, dan budaya sekitar, tetapi konsep tersebut berbeda dengan konsep yang sebenarnya (Ningrum, Yulianti, Helingo, & Budiarto, 2018) (Ojose, 2015). (Cetner, 2016) menyatakan bahwa miskonsepsi disebabkan kebutuhan mahasiswa yang berlebihan untuk memahami petunjuk yang mereka terima.

Dalam beberapa kasus miskonsepsi dapat bertahan lama dalam pemikiran mahasiswa dikarenakan mahasiswa mengingat konsep yang salah dalam waktu yang lama (Hayati & Setyaningrum, 2019). Kemampuan mengkonstruksi bukti merupakan salah satu kemampuan yang harus dikuasai dalam mempelajari matematika karena matematika berisi definisi, teorema, aksioma yang melibatkan proses pembuktian. Kemampuan mengkonstruksi bukti diperlukan agar mahasiswa terlatih dalam mengkomunikasikan ide-ide matematika secara logis sehingga menghasilkan pengetahuan matematika baru yang sistematis (Steele & Rogers, 2012). Terdapat empat kategori model pengkonstruksian bukti matematis yaitu (1) general argument yang berarti mengkonstruksi bukti melalui pengurutan pernyataan yang mengacu pada semua kasus yang sebelumnya, (2) invalid general argument yaitu proses pembuktian masih lemah, (3) empirical argument yaitu proses pembuktian menggunakan beberapa kasus yang sesuai, dan (4) non genuine argument dengan hanya sebatas mempercayai pernyataan (Stylianides & Stylianides, 2009). Meskipun kemampuan mengkonstruksi bukti ini penting, hasil penelitian (Inglis & Alcock, 2012) (Mejia-Ramos & Weber, 2014) menunjukkan bahwa sebagian besar mahasiswa tidak dapat membedakan proses pembuktian yang valid dan tidak valid.

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari kemampuan perkembangan teknologi modern, mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin dan memajukan daya pikir manusia. Perkembangan di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika di bidang teori bilangan, aljabar, analisis, teori peluang dan matematika diskrit. Menguasai dan mencipta teknologi dimasa depan diperlukan penguasaan matematika yang kuat sejak dini. Pembelajaran matematika hendaknya dimulai dengan pengenalan masalah yang sesuai dengan situasi (contextual problem). Mengajukan masalah kontekstual, peserta didik secara bertahap dibimbing menguasai konsep matematika. Dimasa sekarang ini matematika masih menjadi masalah sebagian besar siswa. Sebagian besar mahasiswa menganggap bahwa matematika merupakan pelajaran yang sulit karena berisi tentang perhitungan angka-angka yang rumit dan kumpulan aturan-aturan yang perlu dipahami. Salah satu materi yang dianggap susah dalam pembelajaran matematika khususnya mahasiswa adalah aljabar. Ketika mahasiswa belajar tentang aljabar mereka masih sering mengalami kesalahan konsep dalam memahaminya. Sebagian orang pernah menggunakan konsep aljabar dalam permasalahan sehari-hari, baik yang disadari maupun tidak disadari khususnya bagi mereka yang pernah menempuh jenjang pendidikan. Ketika mahasiswa diberikan pertanyaan berapakah jumlah dari 2 apel ditambah 2 jeruk.

Sebenarnya pada saat itu secara tidak langsung anak sudah mulai diperkenalkan pada pemahaman konsep aljabar, dimana apel dan jeruk dapat dianggap sebagai suatu variabel dari masing-masing suku, sehingga mahasiswa dapat menjawab 2 apel ditambah 2 jeruk sama dengan 2 apel dan 2 jeruk. Pengenalan konsep aljabar perlu diberikan kepada siswa, karena konsep tersebut akan berguna diberbagai bidang matematika yang akan mahasiswa pelajari. Ada banyak hal yang harus dikuasai mahasiswa adalah memahami konsep aljabar meliputi: bentuk aljabar dan unsur-unsurnya, persamaan dan pertidaksamaan linear serta penyelesaian, aljabar dan operasinya, relasi, fungsi dan grafiknya. Konsep aljabar tersebut dapat diberikan dan ditanamkan secara efektif dengan mengajarkan aljabar di kelas. Pembelajaran aljabar tersebut bertujuan agar mahasiswa mampu untuk berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, kreatif, dan kerjasama. Namun, pada kenyataannya masih banyak mahasiswa yang belum menguasai konsep-konsep dalam aljabar. Kesalahan tersebut berupa miskonsepsi pada penguasaan soal aljabar.

Berdasarkan paparan di atas rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana miskonsepsi mahasiswa pada konsep aljabar ditinjau dari kemampuannya dalam mengkonstruksi bukti. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan miskonsepsi mahasiswa pada konsep aljabar ditinjau dari kemampuannya dalam mengkonstruksi bukti.

2. Metode

Untuk menjawab rumusan serta tujuan penelitian yaitu mendeskripsikan miskonsepsi mahasiswa pada konsep aljabar ditinjau dari kemampuannya dalam mengkonstruksi bukti, penelitian ini didesain menggunakan penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif dengan tahapan: 1) studi pendahuluan, 2) perencanaan, 3) pelaksanaan. Subjek dalam penelitian ini adalah mahasiswa prodi matematika semester 5 dan mahasiswa yang dipilih berdasarkan kategori kemampuannya dalam mengkonstruksi suatu bukti pada teorema yang ada pada materi aljabar. Kategori yang dimaksud adalah: 1) general argument yang berarti mengkonstruksi bukti melalui pengurutan pernyataan yang mengacu pada semua kasus yang sebelumnya, 2) invalid general argument yaitu proses pembuktian masih lemah, 3) empirical argument yaitu proses pembuktian menggunakan beberapa kasus yang sesuai, dan 4) non genuine argument dengan hanya sebatas mempercayai pernyataan. Masing-masing subjek mewakili satu kategori kemampuan mengkonstruksi bukti. Teknik pengumpulan data adalah dengan pemberian tes dan wawancara. Tujuan dari tes dan wawancara ini adalah untuk mendapatkan data terkait miskonsepsi yang mahasiswa alami. Berdasarkan hal tersebut instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah lembar tes dan pedoman wawancara. Tes berisi soal yang berkaitan dengan konsep dasar aljabar yang berhubungan dengan teorema yang dibuktikan mahasiswa pada tes awal (penentuan subjek) agar lebih terlihat miskonsepsi yang terjadi pada mahasiswa. Teknik analisis data terdiri dari tiga tahapan yaitu: 1) reduksi data, 2) penyajian data, dan 3) penarikan kesimpulan. Reduksi data adalah memilih data primer yaitu data yang dapat memaparkan dengan jelas miskonsepsi yang mahasiswa alami, untuk selanjutnya disajikan dalam bentuk deskripsi. Penarikan kesimpulan didasarkan pada hasil dari data yang telah disajikan.

3. Hasil dan Pembahasan

Selama perkuliahan Struktur Aljabar, setelah diberikan definisi-definisi dan sifat-sifat pada pembelajar, mahasiswa diperkenalkan cara mengatasi masalah yang akan dibuktikan, hal ini dilakukan untuk melatih mahasiswa mengkonstruksi bukti, dan melakukan analisis terhadap setiap argumen. Sebelum dilakukan proses pembelajaran mahasiswa diberikan soal pretest, dan diberikan soal tes kembali setelah melewati proses pembelajaran. Adapun nilai yang diperoleh mahasiswa pada pretest analisis pendahuluan. Hasil pretest yang dicapai oleh mahasiswa belum memuaskan. Nilai rata-rata yang diperoleh dengan simpangan baku 15,96. Mahasiswa sebelum melakukan pretest telah memperoleh pengetahuan tentang materi aljabar. Aljabar beserta teorema-teoremanya dibuktikan dengan cara pembuktian yang ada pada buku struktur aljabar seperti pada umumnya.

Kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti dipengaruhi oleh analisis pendahuluan terhadap masalah yang diberikan. Sehingga untuk membantu mahasiswa dalam melakukan analisis pendahuluan, perkuliahan struktur aljabar dosen mengajak mahasiswa untuk menuliskan tujuan yang akan dibuktikan, dan mahasiswa diajak untuk berpikir maju/mundur untuk menghubungkan antara konjektur dengan kesimpulan. Setelah menerapkan strategi mahasiswa diberikan kembali test yang disebut dengan posttest. Hasil posttest analisis pendahuluan yang dicapai oleh mahasiswa dipengaruhi oleh kemampuan berpikir mahasiswa yang telah distimulus selama beberapa pertemuan pertemuan memiliki rata-rata nilai yang diperoleh mahasiswa adalah 71,55 dengan simpangan baku 7,86. Hal ini menunjukkan perbedaan. Ini artinya terdapat peningkatan kemampuan analisis pendahuluan mahasiswa. Peningkatan tersebut tidak terlepas dari strategi yang diterapkan dari pembelajaran Struktur Aljabar yang sangat abstrak dalam melakukan pembuktian. Kebenaran sebuah pernyataan matematika dianggap sebagai konsekuensi logis dari definisi, aksioma, atau pernyataan-pernyataan lain yang sebelumnya sudah dibuktikan benar.

Pemberian strategi pembelajaran yang menarik dari dosen itu sendiri dalam pembelajaran hanyalah alat bantu untuk melakukan pembuktian, yang paling penting untuk mempermudah melakukan analisis adalah mengubah pernyataan ke dalam bentuk implikasi. Dalam melakukan pembuktian, usaha pertama kita adalah menggunakan bukti langsung (Emeira, Hapizah, & Scristia, 2020). Jika bukti langsung tidak berhasil, kita dapat menggunakan bukti tidak langsung. Namun, dalam penelitian ini hanya dibuktikan dengan bukti langsung. Hal ini dikarenakan proses pembelajaran yang menarik yang disiapkan oleh

dosen adalah proses KBM yang baik sehingga untuk pernyataan yang tidak dapat dibuktikan dengan bukti langsung sangat sulit untuk ditentukan pilihan antara kontraposisif dan kontradiksi. Pada hasil wawancara yang sudah dilakukan juga menunjukkan hasil bahwa; 1) mahasiswa kesulitan dalam mengkonstruksi bukti matematis karena pemberian materi dari awal memakai pola pembelajaran Daring sedangkan materi aljabar perlu diberikan secara luring agar mahasiswa lebih mengerti, 2) kondisi KBM yang terlalu serius juga membuat mahasiswa canggung dan tidak bisa bertanya lebih leluasa ketika mengalami kesulitan dan 3) pemberian materi harus ada pengulangan. Setelah diberi perlakuan yang mahasiswa inginkan dalam belajar, menunjukkan hasil bahwa terdapat pengaruh model pembelajaran yang baik dari dosen itu sendiri terhadap kemampuan mahasiswa dalam menganalisis pembuktian, yang tadinya kurang baik menjadi baik selama belajar juga menunjukkan bahwa pengetahuan mahasiswa tentang definisi, aksioma, dan teorema-teorema yang sudah ada menjadi sangat penting dalam penyusunan bukti, hal ini juga ditunjukkan oleh penelitian yang dilakukan oleh (Gabel & Dreyfus, 2017). Mahasiswa juga harus memperhatikan dan melihat terlebih dahulu bahwa kondisi pada teorema yang akan digunakan sudah terpenuhi.

4. Penutup

Kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian sangat dipengaruhi oleh analisis pendahuluan yang mahasiswa lakukan terhadap suatu pernyataan. Dari uji statistik yang dilakukan terdapat perbedaan rata-rata sebelum dan setelah diterapkan pembelajaran yang menarik pada perkuliahan Struktur Aljabar, hal ini menunjukkan bahwa pembelajaran yang menarik dari dosen memberikan pengaruh terhadap kemampuan analisis pendahuluan mahasiswa dalam melakukan analisis bukti. Terdapat beberapa hal yang harus diperhatikan oleh mahasiswa dalam menyusun bukti yaitu pengetahuan tentang definisi, aksioma, dan teorema-teorema yang sudah ada sangatlah penting dimiliki oleh mahasiswa dalam menyusun bukti. Kedua, sebelum teorema digunakan perlu ditunjukkan terlebih dahulu bahwa kondisi dalam teorema tersebut sudah terpenuhi.

Daftar Pustaka

- Andriani, L. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Meyelesaikan Soal Aljabar di Program Studi Pendidikan Matematika UIN SUSKA RIAU. *Jurnal Cendekia : Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 550–562. <https://doi.org/10.31004/cendekia.v3i2.146>
- Arslan, H. O., Cigdemoglu, C., & Moseley, C. (2012). A Three-Tier Diagnostic Test to Assess PreService Teachers' Misconceptions about Global Warming, Greenhouse Effect, Ozone Layer Depletion, and Acid Rain. *International Journal of Science Education*. <https://doi.org/10.1080/09500693.2012.680618>
- Ay, Y. (2017). A Review of Research on the Misconceptions in Mathematics Education. *Education Research Highlights in Mathematics*, 21–31.
- Aydin, S., Kahraman, K., Of, M., Türkeri, K., Mutlu, C., & Kiliçarslan, İ. (2017). Teaching abstract mathematics in vocational schools: Teachers' views. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2017 (December Special Issue INTE), 15–19.
- Cetner, M. (2016). *Common Misconceptions in Mathematics: Strategies to Correct Them*. In *Mathematics Teaching in the Middle School*.
- Goldin-Meadow, S. (2015). From action to abstraction: Gesture as a mechanism of change. *Developmental Review*, 38, 167–184. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.007>
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual Differences in Conceptual and Procedural Knowledge When Learning Fractions. *Journal of Educational Psychology*. <https://doi.org/10.1037/a0017486>
- Hayati, R., & Setyaningrum, W. (2019). Identification of Misconceptions in Middle School Mathematics Utilizing Certainty of Response Index. *Journal of Physics: Conference Series*, 1320(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1320/1/012041>

- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4). <https://doi.org/10.5951/jresemathed uc.43.4.0358>
- Kolitsos Moru, E., & Qhobela, M. (2013). Secondary school teachers' Pedagogical content knowledge of some common student errors and misconceptions in sets. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*. <https://doi.org/10.1080/10288457.2013.848534>
- Lestyanto, L. M., Nasution, S. H., Tejo, E., Cahyowati, D., Kahfi, M. S., & Malang, U. N. (2019). Kesalahan konstruksi konsep mahasiswa pada materi aljabar dan defragmentasi struktur berpikirnya. *Jurnal Review Pembelajaran Matematika (JRPM)*, 4(2), 128–142.
- Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 30–41. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001>
- Lui, A. M., & Bonner, S. M. (2016). Preservice and inservice teachers' knowledge, beliefs, and instructional planning in primary school mathematics. *Teaching and Teacher Education*, 56, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.01.015>
- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States: Second Edition*. In *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States: Second Edition*. <https://doi.org/10.4324/9780203856345>
- Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2). <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9514-2>
- Murphy, P. E. L., Evans, T., Klymchuk, S., Novak, J., Stephens, J., & Thomas, M. (2020). University STEM students' perceptions of creativity in non-routine problemsolving. *ANZIAM Journal*, 61, C152–C165. <https://doi.org/10.21914/anziamj.v61i0.15052>
- Ningrum, R. W., Yulianti, M., Helingo, D. D. Z., & Budiarto, M. T. (2018). Students' Misconceptions on Properties of Rectangles. *Journal of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/947/1/012018>
- Ojose, B. (2015). *Students' Misconceptions in Mathematics: Analysis of Remedies and What Research Says*. 72, 30–34.
- Orrantia, J., Muñoz, D., Matilla, L., Sanchez, R., San Romualdo, S., & Verschaffel, L. (2019). Disentangling the Mechanisms of Symbolic Number Processing in Adults' Mathematics and Arithmetic Achievement. *Cognitive Science*, 43(1). <https://doi.org/10.1111/cogs.12711>
- Özdemir, A. Ş., Karaşan, S., & Şahal, M. (2021). An examination of the relationship between secondary school students' abstract thinking skills, self-efficacy perceptions and attitudes towards mathematics. *Participatory Educational Research*, 8(2), 391–406. <https://doi.org/10.17275/per.21.45.8.2>
- Sheu, T.-W., Chen, T.-L., Tsai, C.-P., Tzeng, J.-W., Deng, C.-P., & Nagai, M. (2013). Analysis of Students' Misconception Based on Rough Set Theory. *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*, 05(02), 67–83. <https://doi.org/10.4236/jilsa.2013.5.2008>
- Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships Between Mathematical Knowledge for Teaching and Teaching Practice: The Case of Proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9204-5>
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). *Proof constructions and evaluations*. (March), 237–253. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9191-3>
- Tang, W. L., Tsai, J. T., & Huang, C. Y. (2020). Inheritance coding with gagné-based learning hierarchy approach to developing mathematics skills assessment systems. *Applied Sciences (Switzerland)*, 10(4). <https://doi.org/10.3390/app10041465>
- Viseu, F., Menezes, L., Fernandes, J. A., Gomes, A., & Martins, P. M. (2017). Conceptions of basic education teachers about math proof: Influence of professional experience. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 31(57), 430–453. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a21>