ISBN: 2807-324X (online)

Eksistensi dan Ketunggalan Solusi Viscosity Masalah Ergodik

Made Benny Prasetya Wiranata*

Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta 55281, Indonesia

*Penulis Korespondensi: made.benny.prasetya.w@ugm.ac.id

Abstract. The study of viscosity solution to Hamilton-Jacobi equation was attracted researchers in the last decades. The study focused on completing the question regarding existence, uniqueness, and regularity of the solution. In this research, we covered the existence of viscosity solutions to the ergodic problem or Hamilton-Jacobi equation of contact type in the n-dimension with some general assumptions. The viscosity solutions obtained are not unique in general. A prototype of the Hamiltonian class was investigated and analyzed to show the problem the uniqueness of the viscosity solution. We used the method in Jing (2020:6) to obtain the existence and uniqueness of the ergodic problem.
Keywords: ergodic problem; Hamilton-Jacobi equation; viscosity solution.

1. Pendahuluan

Solusi viscosity dari suatu persamaan diferensial parsial (PDP) muncul ketika kita mempelajari bentuk non divergen dari suatu PDP khususnya bentuk PDP nonlinear, lihat Crandall (1983:3), Evans (2010:4), dan Lions (1987:7). Sifat-sifat solusi viscosity dipaparkan pada paper oleh Crandall (1984:2) dan kemudian dilengkapi oleh penelitian lainnya. Penelitian terkait persamaan Hamilton-Jacobi, salah satunya membahas terkait masalah homogenisasi yang pertama kali memperoleh hasil pada paper yang tidak di terbitkan oleh Lions (1987:7). Kemudian fokus beralih pada masalah ergodic yang muncul pada proses homogenisasi tersebut. Beberapa hasil terkait masalah ergodic orde satu diperoleh oleh Le(2016:8) dan Jing (2020:6). Salah satu contohnya adalah persamaan Hamilton-Jacobi tipe kontak dengan bentuk

$$-\Delta u(x) + H\big(x, u(x), Du(x)\big) = c. \tag{1}$$

Persamaan di atas juga dikenal dengan masalah ergodik diperumum. Masalah ergodik ini muncul ketika kita mempelajari sifat asimptotik solusi persamaan Hamilton-Jacobi

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + H\big(x, u(x,t), Du(x,t)\big) = 0, \tag{2}$$

dimana $\Delta u(x,t)$ adalah Lapacian terhadap variabel x dan $Du(x,t)$ adalah gradien terhadap variabel x. Masalah (2) memiliki solusi $u(x,t)$ apabila Hamiltonian H bersifat koersif yaitu

$$H(x,r,p) \to \infty \quad \text{ketika} \quad |p| \to \infty$$

secara seragam untuk $x \in \mathbb{R}^n$. Selanjutnya, saat $t \to \infty$, pada penelitian lain, Barles (2000:1), diperoleh bahwa

ISBN: 2807-324X (online)

$$u(x,t) - (v(x) - ct) \to 0$$

secara lokal seragam untuk $x \in \mathbb{R}^n$ dengan $v(x)$ merupakan solusi viscosity persamaan (1). Pada dasarnya, solusi viscosity persamaan (1) tidak tunggal secara umum. Untuk itu akan diselidiki eksistensi dan ketunggalan solusi masalah (1). Selain itu, diberikan prototipe Hamiltonian untuk diselidiki ketunggalan solusi viscosity untuk (1). Untuk kasus khusus (1), tanpa suku $-\Delta u$, pada Jing (2020:6) dijelaskan bahwa terdapat himpunan ketunggalan (*uniqueness set*) dimana himpunan ini merupakan himpunan terkecil di mana jika dua solusi viscosity bernilai sama, maka keduanya akan sama pada domainnya. Hal ini masih belum dapat ditunjukkan untuk masalah ergodic orde dua.

2. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif untuk menyelidiki well-posedness dari suatu masalah ergodik. Pada penelitian ini diselidiki eksistensi dan ketunggalan solusi viscosity persamaan Hamilton-Jacobi tipe kontak. Solusi viscosity merupakan salah satu tipe solusi lemah dari persamaan diferensial parsial. Pada penelitian yang dilakukan oleh Ishii (1987:5), untuk memperoleh eksistensi solusi viscosity, diberikan asumsi eksistensi subsolusi viscosity dan supersolusi viscosity sehingga dapat digunakan metode Perron untuk mendapatkan solusi viscositynya. Metode Perron tidak dapat digunakan jika kita tidak mengasumsikan adanya subsolusi dan supersolusi viscosity. Oleh karenanya, pada hasil yang diperoleh dikembangkan metode untuk mendapatkan solusi viscosity dengan mengasumsikan Hamiltoniannya bersifat superlinier. Ide ini dikembangkan oleh Jing (2020:6). Secara umum solusi viscosity tidak tunggal apabila Hamiltonian tidak monoton tegas pada salah satu variabelnya. Untuk itu penelitian memfokuskan pada suatu prototipe Hamiltonian untuk menyelidiki apakah ketunggalan solusi dapat diperoleh. Pada hasil yang diperoleh, ketunggalan solusi viscosity sangat bergantung pada sifat Hamiltonian. Kita dapat tunjukkan bahwa terdapat Hamiltonian yang tidak monoton tegas pada salah satu variabelnya namun solusi viscositynya tunggal.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut diberikan deskripsi permasalahan serta beberapa definisi yang diperlukan pada pembahasan hasil penelitian ini. Pertama-tama kita mulai dengan definisi solusi viscosity dari masalah Hamilton-Jacobi. Diberikan masalah ergodic

$$-\Delta u(x) + H\big(x, u(x), Du(x)\big) = c \qquad \text{pada } \mathbb{T}^n \tag{3}$$

dengan Hamiltonian $H: \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kontinu dan $u: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$. Pada makalah ini $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ adalah torus datar berdimensi-n. Dicari pasangan $(u,c) \in C(\mathbb{T}^n) \times \mathbb{R}$ yang menyelesaikan (3) dalam arti viscosity.

Pada makalah ini akan selalu digunakan solusi viscosity, namum kadang kata "viscosity" sering dihilangkan untuk memudahkan penulisan. Menilik pada hasil yang diperoleh, kita dapatkan eksistensi solusi untuk (3) dengan asumsi yang cukup umum. Kemudian umum diketahui bahwa pada teori solusi viscosity, jika pemetaan $r \mapsto H(x,r,p)$ tidak monoton kuat, maka (3) mungkin tidak mempunyai solusi tunggal. Diberikan prototipe Hamiltonian dan ditunjukkan bahwa masalah ergodik dengan Hamiltonian tersebut memiliki solusi tunggal. Selanjutnya diberikan definisi subsolusi viscosity serta supersolusi viscosity persamaan (3).

Definisi 1

Suatu fungsi semikontinu atas $u: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ dikatakan subsolusi viscosity dari masalah ergodic (3) jika

- *untuk setiap $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^n)$, jika $u - \varphi$ mempunyai maksimum lokal di $x_0 \in \mathbb{T}^n$ maka*
$$-\Delta\varphi(x_0) + H\big(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)\big) \le c.$$

Suatu fungsi semikontinu bawah $u: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ dikatakan supersolusi viscosity dari masalah ergodic (3) jika

ISBN: 2807-324X (online)

- *untuk setiap $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^n)$, jika $u - \varphi$ mempunyai minimum lokal di $x_0 \in \mathbb{T}^n$ maka*
$$-\Delta\varphi(x_0) + H\big(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)\big) \geq c.$$

Suatu fungsi kontinu $u: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ dikatakan solusi viscosity dari masalah ergodic (3) jika u merupakan subsolusi viscosity dan supersolusi viscosity dari (3).

3.1 Pembahasan

Terdapat dua hasil utama yang diperoleh yaitu eksistensi viscosity untuk (3) dan ketunggalan solusi tersebut. Diberikan asumsi untuk Hamiltonian H sebagai berikut.

(H1) H bersifat Lipschitz seragam pada r, yaitu, terdapat konstan $C_1 > 0$ sehingga
$$|H(x,r,p) - H(x,s,p)| \leq C_1|r - s|$$
untuk setiap $(x,p) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n,\ r,s \in \mathbb{R}$.

(H2) H bersifat koersif pada p, yaitu,
$$\lim_{|p|\to\infty} H(x,0,p) = \infty$$
secara seragam untuk $x \in \mathbb{T}^n$.

(H3) H bersifat superlinear pada p, yaitu,
$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{H(x,0,p)}{|p|} = \infty$$
secara seragam untuk $x \in \mathbb{T}^n$.

Berikut ini merupakan hasil yang diperoleh dari penelitian terdahulu.

Teorema 2

Asumsikan (H1) dan (H2). Asumsikan lebih lanjut terdapat $c \in \mathbb{R}$, dan $\psi, \varphi \in Lip(\mathbb{T}^n)$ sedemikian sehingga $\psi \leq \varphi$, dengan ψ dan φ adalah subsolusi viscosity dan supersolusi viscosity untuk (3) berturut-turut. Maka, (3) mempunyai solusi viscosity $u \in Lip(\mathbb{T}^n)$ dengan $c \in \mathbb{R}$ diberikan pada asumsi.

Teorema di atas merupakan versi lain dari hasil yang diperoleh oleh Ishii (1987:5). Pada teorema di atas, diperlukan eksistensi subsolusi dan supersolusi viscosity dan kemudian digunakan metode Perron untuk menunjukkan eksistensi solusi viscosity (3). Pada teorema berikutnya, kita dapat menunjukkan eksistensi solusi viscosity (3) tanpa menggunakan metode Perron.

Teorema 3

Asumsikan (H1) dan (H3). Diperoleh bahwa (3) memiliki solusi $(v,c) \in Lip(\mathbb{T}^n) \times \mathbb{R}$.

Teorema di atas diperoleh juga pada peper Su (2016:9) dan Wang (2019:10) dengan mengasumsikan Hamiltonian bersifat konveks seragam. Namun teorema di atas tidak memerlukan sifat tersebut sehingga pembuktiannya dapat dikategorikan metode baru.

Bukti Teorema 3:
Kita asumsikan (H1) dan (H3). Dipilih konstan $\lambda > C_1 + 1$. Untuk setiap $u \in C(\mathbb{T}^n)$, misalkan $v \in Lip(\mathbb{T}^n)$ adalah solusi viscosity tunggal dari

ISBN: 2807-324X (online)

$$\lambda v - \Delta v + H(x, u, Dv) - \lambda u = 0 \tag{4}$$

pada $\mathbb{T}^n$. Kemudian, dinotasikan $G(u) = w \coloneqq v - \min_{\mathbb{T}^n} v$. Jelas bahwa $w = G(u)$ memenuhi

$$\lambda(w - u) - \Delta w + H(x, u, Dw) = -\lambda \min_{\mathbb{T}^n} v \tag{5}$$

pada $\mathbb{T}^n$. Kita akan gunakan teorema titik tetap Schauder dengan menunjukkan eksistensi titik tetap pemetaan $G: C(\mathbb{T}^n) \to C(\mathbb{T}^n)$.

Lemma 4

Untuk setiap $u_1, u_2 \in C(\mathbb{T}^n)$,

$$\|G(u_1) - G(u_2)\| \leq C \, \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}.$$

Bukti Lemma 4:

Untuk $i = 1,2$, misalkan $v_i \in C(\mathbb{T}^n)$ adalah solusi viscosity tunggal untuk

$$\lambda v_i - \Delta v_i + H(x, u_i, Dv_i) - \lambda u_i = 0$$

pada $\mathbb{T}^n$. Dengan memanfaatkan (H1) diperoleh bahwa $v_1 - \left(1 + \frac{C_1}{\lambda}\right) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$ merupakan subsolusi viscosity dari

$$\lambda v - \Delta v + H(x, u_2, Dv) - \lambda u_2 = 0.$$

Dengan prinsip perbandingan solusi viscosity, kita dapatkan

$$v_1 - \left(1 + \frac{C_1}{\lambda}\right) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq v_2.$$

Dengan argumen serupa diperoleh bahwa

$$\|v_1 - v_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq \left(1 + \frac{C_1}{\lambda}\right) \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq 2\|v_1 - v_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}.$$

Selanjutnya, untuk $i = 1,2$, dinotasikan

$$w_i = G(u_i) = v_i - \min_{\mathbb{T}^n} v_i = v_i - v_i(x_i)$$

untuk suatu $x_i \in \mathbb{T}^n$. Kemudian, untuk setiap $x \in \mathbb{T}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}
w_1(x) - w_2(x) \quad &= \big(v_1(x) - v_1(x_1)\big) - \big(v_2(x) - v_2(x_2)\big) \\
&= \big(v_1(x) - v_2(x)\big) + \big(v_2(x_2) - v_1(x_1)\big) \\
&= \big(v_1(x) - v_2(x)\big) + \left(\min_{\mathbb{T}^n} v_2 - v_1(x_1)\right) \\
&\leq \big(v_1(x) - v_2(x)\big) + \big(v_2(x_1) - v_1(x_1)\big) \\
&\leq 2\|v_1 - v_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq 4\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}
\end{aligned}$$

Dengan argumen simetris, diperoleh $\|w_1 - w_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq 4 \, \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$. ■

Dipilih $C_0 = \max_{x \in \mathbb{T}^n} |H(x, 0,0)|$. Dengan asumsi (H3), dipilih $\alpha > 1$ sedemikian hingga jika $|p| \geq \alpha$, maka

$$\frac{H(x, 0, p)}{|p|} \geq \lambda\big(4 + 3C_0 + 3\sqrt{n}\big) \tag{6}$$

Dinotasikan

$$K \coloneqq \left\{ u \in Lip(\mathbb{T}^n) : \; u \geq 0, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} + \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq \alpha\big(1 + \sqrt{n}\big) \right\}$$

Jelas bahwa K adalah subset konveks dan kompak tak kosong dari $C(\mathbb{T}^n)$.

ISBN: 2807-324X (online)

Lemma 5
Kita peroleh bahwa $G(K) \subset K$, dengan $G(K) \coloneqq \{G(v) : v \in K\}$.

Bukti Lemma 5:
Dipilih $u \in K$, dan misalkan $v \in Lip(\mathbb{T}^n)$ adalah solusi viscosity dari (4). Pertama, jelas bahwa $C_0 + 2\alpha(1+\sqrt{n})$ dan $-C_0 - \alpha(1+\sqrt{n})$ berturut-turut adalah supersolusi dan subsolusi viscosity dari (4). Berdasarkan prinsip perbandingan (*the comparison principle*), diperoleh

$$-C_0 - \alpha(1+\sqrt{n}) \leq v \leq C_0 + 2\alpha(1+\sqrt{n})$$

pada $\mathbb{T}^n$. Akibatnya, untuk hampir dimana-mana $x \in \mathbb{T}^n$, berlaku

$$\begin{aligned} H(x,0,Dv) &\leq H(x,u,Dv) + C_1 u(x) \leq H(x,u,Dv) + C_1\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \\ &= \lambda\big(u(x) - v(x)\big) + \Delta v(x) + C_1\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \\ &\leq \lambda\big(u(x) - v(x)\big) + \big(\|Dv\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} + 1\big)\sqrt{n} + C_1\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \\ &\leq \lambda\Big(C_0 + 2\alpha(1+\sqrt{n})\Big) + C_1\alpha(1+\sqrt{n}) + \big(\|Dv\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} + 1\big)\sqrt{n} \\ &\leq 3\alpha\Big(C_0 + \alpha(1+\sqrt{n})\Big) + \big(\|Dv\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} + 1\big)\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Diandaikan $\|Dv\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \geq \alpha$, maka $\frac{1}{\|Dv\|} \leq \frac{1}{\alpha}$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{H(x,0,Dv)}{\|Dv\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}} &\leq \frac{3\lambda\Big(C_0 + \alpha(1+\sqrt{n})\Big)}{\alpha} + \Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big)\sqrt{n} \\ &\leq \frac{3\lambda C_0}{\alpha} + 1 + \sqrt{n} + 2\sqrt{n} \\ &\leq 3\lambda C_0 + 3 + 3\sqrt{n} \\ &\leq \lambda\big(4 + 3C_0 + 3\sqrt{n}\big) \end{aligned}$$

Karena ketaksamaan berlaku untuk hampir dimana-mana $x \in \mathbb{T}^n$, maka terjadi kontradiksi dengan (6). Hal ini berakibat bahwa $\|Dv\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq \alpha$. Dengan demikian, untuk $w = v - \min_{\mathbb{T}^n} v$, diperoleh bahwa $w \in K$. ■

Lanjutan Bukti Teorema 3:
Dengan Lemma 4 dan Lemma 5, kita dapat mengaplikasikan teorema titik tetap Schauder untuk menunjukkan eksistensi $u \in K$ sedemikian hingga

$$G(u) = u.$$

Hal ini berarti, untuk $v \in C(\mathbb{T}^n)$ solusi viscosity (5), $u = v - \min_{\mathbb{T}^n} v$ memenuhi

$$H(x,u,Du) = c \coloneqq -\lambda \min_{\mathbb{T}^n} v$$

pada $\mathbb{T}^n$. ■

Di atas telah ditunjukkan eksistensi solusi viscosity untuk (3). Namun jika pemetaan $r \mapsto H(x,r,p)$ tidak monoton tegas maka ketunggalan solusi tidak dapat dijamin. Oleh karena itu, untuk menganalisa lebih jauh, kita akan menggunakan Hamiltonian berikut ini untuk menyelidiki ketunggalan solusi viscosity dari (3).

(H4) Diasumsikan

$$H(x,r,p) = |p|^{m} - V(x) + f(r)$$

ISBN: 2807-324X (online)

untuk $(x, r, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Disini $m \geq 1$ diberikan dan $V \in C(\mathbb{T}^n)$ dengan $\min_{\mathbb{T}^n} V = 0$. Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks, dan

$$\begin{cases} f(r) = 0 & \text{untuk } r \leq 0, \\ f(r) > 0 & \text{untuk } r > 0. \end{cases}$$

Jelas bahwa Hamiltonian di atas tidak monoton tegas untuk variabel r pada $\mathbb{R}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa f tidak turun.

Lemma 6

Misalkan $f \in C(\mathbb{R})$ diberikan seperti di atas. Maka f tidak turun.

Bukti Lemma 6:
Dipilih $0 < r < s$. Dengan memanfaatkan sifat konveks f, kita peroleh

$$0 < f(r) \leq \frac{r}{s} f(s) + \left(1 - \frac{r}{s}\right) f(0) = \frac{r}{s} f(s) \leq f(s). \quad \blacksquare$$

Sebelum diberikan bukti ketunggalan untuk solusi viscosity dari (3), kita berikan contoh ketidaktunggalan solusi viscosity dari (3) untuk kasus tertentu.

Contoh 7. Diasumsikan

$$H(x, r, p) = |p| - V(x) + f(r)$$

untuk $(x, r, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Disini $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } r \leq 0, \\ r & \text{untuk } r > 0. \end{cases}$$

dan $V \in C(\mathbb{T}^n)$ adalah energi potensial dengan $\min_{\mathbb{T}^n} V = 0$. Misalkan $w \in C(\mathbb{T}^n)$ adalah solusi dari

$$-\Delta w + |Dw| + w - V = 0$$

pada $\mathbb{T}^n$. Dapat di cek bahwa 0 adalah subsolusi viscosity persamaan di atas. Hal ini berakibat $w \geq 0$. Lebih khususnya $f(w) = w$ selalu, dan akibatnya $(w, 0)$ adalah solusi dari (3). Dari sini, jelas bahwa (3) juga memiliki solusi $(w + c, c)$.

Selanjutnya, untuk $c = 0$, kita perhatikan masalah ergodik

$$-\Delta v + |Dv| - V = 0 \tag{7}$$

pada $\mathbb{T}^n$. Untuk setiap solusi $v \in C(\mathbb{T}^n)$ dari (7), dipilih $C > \|v\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$, maka $v - C$ juga merupakan solusi untuk (7), dan $v - C \leq 0$. Akibatnya, $f(v - C) = 0$, dan $(v - C, 0)$ adalah solusi dari (3). Hal ini menunjukkan bahwa untuk $c = 0$ terdapat lebih dari satu solusi viscosity untuk (3). $\square$

Selanjutnya, diberikan bukti ketunggalan solusi viscosity untuk $c > 0$.

Teorema 8

Asumsikan (H4). Untuk $c > 0$ ditentukan, (3) memiliki solusi viscosity tunggal $(u_c, c) \in C(\mathbb{T}^n) \times (0, \infty)$.

Bukti Teorema 8:
Untuk setiap $c \geq 0$, (3) memiliki solusi viscosity. Misalkan $u \in C(\mathbb{T}^n)$ adalah solusi dari (3) dengan konstanta $c > 0$ diberikan, yaitu

ISBN: 2807-324X (online)

$$-\Delta u + |Du|^m - V(x) + f(u) = c \tag{8}$$

pada $\mathbb{T}^n$. Dimisalkan $u(x_1) = \max_{\mathbb{T}^n} u$ dan $u(x_2) = \min_{\mathbb{T}^n} u$. Dengan memilih $\phi(x) = u(x_2)$, maka diperoleh $(u-\phi)(x_1) \geq (u-\phi)(x)$. Karena, u merupakan subsolusi viscosity (8), maka diperoleh

$$-V(x_1) + f\big(u(x_1)\big) \leq c \qquad \Rightarrow \qquad f\big(u(x_1)\big) \leq c + \|V\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} =: C_1.$$

Akibatnya, karena fungsi f naik maka $u \leq C$. Sebaliknya, dengan memilih $\phi(x) = u(x_1)$, maka diperoleh $(u-\phi)(x_2) \leq (u-\phi)(x)$. Karena, u merupakan subsolusi viscosity (8), maka diperoleh

$$-V(x_2) + f\big(u(x_2)\big) \geq c \quad \Rightarrow \quad f\big(u(x_2)\big) > c > 0 \quad \Rightarrow \quad u(x_2) \geq \bar{c} = f^{-1}(c) > 0\,.$$

Akibatnya, $\bar{c} \leq u \leq C$. Karena f bersifat konveks dan naik, maka kita dapat temukan $0 < \alpha \leq \beta$ sedemikian hingga

$$\alpha \leq f'(r) \leq \beta.$$

untuk hampir dimana-mana $r \in [\bar{c}, C]$. Dengan ini kita dapat mengaplikasikan teori klasik solusi viscosity untuk memperoleh ketunggalan solusi (8). Selanjutnya, dinotasikan (u_c) solusi tunggal dari (8). ■

4. Penutup

Eksistensi solusi untuk permasalahan (3) diberikan oleh Teorema 3 dengan formula untuk bilangan konstan ergodic diberikan secara implisit. Secara umum solusi viscosity untuk (3) tidak tunggal seperti ditunjukkan pada Contoh 7. Namun untuk Hamiltonian pada asumsi (H4), ditunjukkan bahwa masalah ergodik (3) mempunyai solusi tunggal. Pada penelitian selanjutnya akan diselidiki bagaimana fenomena ketidaktunggalan ini muncul. Lebih khususnya akan diselidiki eksistensi himpunan ketunggalan untuk kasus dimensi 1.

Daftar Pustaka

Barles, G., Souganidis, P.E. (2000). *On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*. SIAM J. Math. Anal. 31, no. 4, 925-939.

Crandall, M.G., Evans, L.C., Lions, P.-L. (1984). *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Am. Math. Soc. 282, 487-502.

Crandall, M.G., Lions, P.-L. (1983). *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Am. Math. Soc. 277, 1-42.

Evans, L.C. (2010). *Partial Differential Equations Second Edition*, American Mathematical Society.

Ishii, H. (1987). *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Math. Journal 55, no. 2, 369-384.

Jing, W., Mitake, H., Tran, H.V. (2020). *Generalized ergodic problems: Existence and uniqueness structures of solutions*. Journal of Differential Equations, 268, 2886-2909.

Lions, P.L., Papanicolaou, G.C., Varadhan, S.R.S. (1987). *Homogenization of Hamilton-Jacobi equation*. Unpublished preprint.

Le, N.Q., Mitake, H., Tran, H.V. (2016). *Dynamical and Geometric Aspects of Hamilton-Jacobi and Linearized Monge-Ampere Equations*. Lecture Notes in Mathematics 2183, Springer.

Su, X., Wang, L., Yan, J. (2016). *Weak KAM theory for Hamilton-Jacobi equations depending on unknown functions*. Discrete and Continuous Dynamical System 36(11):6487-6522.

Wang, K., Wang, L., Yan, J. (2019). *Variational principle for contact Hamiltonian systems and its applications*. Journal de Mathèmatiques Pures et Appliquèes, 167-200.

Ucapan Terimakasih

Penulis yang ingin menyampaikan terima kasih kepada Fakultas MIPA UGM yang telah mendanai penelitian ini sehingga dapat dipublikasikan untuk kepentingan umum.